

## CAPÍTULO 3

### MODELOS DE BOX—JENKINS

---

Estudam-se neste capítulo os modelos de Box-Jenkins, tanto para processos estacionários, como para processos não-estacionários que exibem algum grau de homogeneidade. A base deste capítulo, como dos dois imediatamente seguintes, está quase toda em BOX & JENKINS (5).

#### 3.1 — A FILOSOFIA DE BOX—JENKINS

Na última década tem-se usado bastante a filosofia de Box-Jenkins para construção de modelos em séries temporais, que se caracteriza por dois aspectos fundamentais:

a) parcimônia

Na prática, o modelo deve conter o menor número possível de parâmetros.

a serem estimados; e

b) construção iterativa do modelo

O modelo é construído a partir dos próprios dados, ao invés de se considerar um modelo potencialmente apropriado e testar seu ajustamento. Constrói-se o modelo em etapas:

i) a primeira etapa é a de *identificação*, na qual procura-se determinar o tipo de modelo a ser usado, com base na análise das autocorrelações;

ii) a seguir vem a etapa de *estimação*, na qual estimam-se os parâmetros; e

iii) finalmente, na etapa de *verificação*, procura-se verificar se o modelo ajustado é adequado para descrever os dados. Se o modelo mostra-se inadequado volta-se à identificação e repete-se o processo.

O modelo assim obtido pode ser utilizado para fazer *previsão* de observações futuras ou *controle* do processo.

A fase crítica desse procedimento de construção de modelos é a etapa de identificação do modelo, que exige treino e perspicácia do pesquisador, uma vez que vários modelos semelhantes podem ser identificados. Muitos dos modelos em uso atualmente são casos particulares dos modelos de Box-Jenkins. Entretanto, uma identificação errônea pode levar a um modelo menos eficaz do ponto de vista de previsão.

### 3.2 - MODELOS LINEARES PARA SÉRIES ESTACIONÁRIAS

Uma série temporal pode ser representada de duas maneiras e quivalentes:

a) como a saída de um filtro linear cuja entrada é ruído branco:

$$\tilde{z}_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \Psi(B) a_t, \quad (3.2.1)$$

com 
$$\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \quad \text{e} \quad \psi_0 = 1; \quad \text{e}$$

b) como uma soma ponderada de valores passados da série mais um erro aleatório:

$$\tilde{z}_t = \pi_1 \tilde{z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + a_t, \quad (3.2.2)$$

ou 
$$\pi(B) \tilde{z}_t = a_t, \quad (3.2.3)$$

com 
$$\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j.$$

Aplicando-se  $\Psi(B)$  e  $\pi(B)$  simultaneamente sobre  $\tilde{z}_t$  obtém-se uma relação entre os dois operadores:

$$\Psi(B) \pi(B) \tilde{z}_t = \Psi(B) a_t = \tilde{z}_t.$$

Então, 
$$\Psi(B) \pi(B) = 1$$

e 
$$\pi(B) = \Psi^{-1}(B). \quad (3.2.4)$$

### 3.2.1 - Condições de Estacionaridade e de Invertibilidade

Para que a série se apresente num certo estado de equilíbrio é preciso que seus parâmetros satisfaçam um conjunto de restrições

ções chamadas condições de estacionaridade e de invertibilidade.

A função de autocovariância da série (3.2.1) é dada por

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= E [ \tilde{z}_t \tilde{z}_{t+k} ] \\
 &= E \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j a_{t-j} \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i a_{t+k-i} \right] \\
 &= E \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=-k}^{\infty} \Psi_j \Psi_{i+k} a_{t-j} a_{t-i} \right] \\
 &= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \Psi_{j+k} , \tag{3.2.5}
 \end{aligned}$$

uma vez que  $E [ a_t^2 ] = \sigma_a^2$  e  $E [ a_i a_j ] = 0, i \neq j$ .

Em particular, sua variância é dada por

$$\sigma_z^2 = \gamma_0 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^2 \tag{3.2.6}$$

Para que a variância seja finita é necessário que os pesos  $\Psi_j$  decresçam, para a série em (3.2.6) convergir.

Para o processo ser estacionário é preciso que as autocovariâncias e autocorrelações satisfaçam certas condições. No caso de um processo linear, para o processo ser estacionário é necessário e suficiente que a série de pesos  $\Psi(B)$  convirja para  $|B| \leq 1$ , isto é, sobre ou dentro do círculo unitário [5 e 2, p.15].

**Exemplo 3.1** - Seja o processo AR(1)

$$\begin{aligned}
 (1 - \phi_1 B) \tilde{z}_t &= a_t \\
 \tilde{z}_t &= (1 - \phi_1 B)^{-1} a_t \\
 &= (1 - \phi_1 B - \phi_1^2 B^2 - \dots) a_t .
 \end{aligned}$$

Então,  $\Psi_j = \phi_1^j$ . Logo, se  $|\phi_1| \geq 1$  a série de pesos diverge, o que implica que a variância do processo, dada em (3.2.6), não é finita e a série não pode ser escrita na forma (3.2.1). Portanto, a condição para a série do modelo AR(1) ser estacionária é que  $|\phi_1| < 1$ . ■

Impõe-se, também, uma restrição aos pesos  $\pi$  em (3.2.2) para assegurar o que se chama invertibilidade. A condição de invertibilidade não depende da condição de estacionaridade, podendo se aplicar também a processos não-estacionários. Estas condições são importantes para evitar multiplicidade de modelos, como será visto adiante (2). Num processo linear, a condição de invertibilidade é de que a série de pesos  $\pi(B)$  convirja para  $|B| \leq 1$ , isto é, sobre ou dentro do círculo unitário.

**Exemplo 3.2** - Seja o processo MA(1)

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

$$(1 - \theta_1 B)^{-1} \tilde{z}_t = a_t$$

$$(1 - \theta_1 B - \theta_1^2 B^2 - \dots) \tilde{z}_t = a_t .$$

Então,  $\pi_j = \theta_1^j$ . Logo, se  $|\theta_1| \geq 1$  a série de pesos diverge e o processo não é invertível. Portanto, a condição para a série do modelo MA(1) ser invertível é que  $|\theta_1| < 1$ . ■

### 3.2.2 - Modelos Auto-regressivos

Seja um processo AR(p)

$$\phi(B) \tilde{z}_t = a_t ,$$

que também pode ser escrito

$$\tilde{z}_t = \phi^{-1}(B) a_t = \Psi(B) a_t .$$

### 3.2.2.1 - Condições de estacionaridade e de invertibilidade para processos auto-regressivos

A equação

$$\phi(B) = 0$$

é chamada equação característica do processo. Se  $G_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  forem as raízes da equação característica, pode-se escrever

$$\phi(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i B) \quad (3.2.7)$$

e, expandindo em frações parciais,

$$\Psi(B) = \phi^{-1}(B) = \sum_{i=1}^p \frac{K_i}{1 - G_i B} \quad (3.2.8)$$

Para que o processo seja estacionário é preciso que  $\Psi(B)$  convirja para  $|B| \leq 1$ , o que ocorre se  $|G_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Esta condição é equivalente à de que a equação característica tenha raízes fora do círculo unitário.

**Exemplo 3.3** - Seja o processo AR(1)

$$(1 - \phi_1 B) \tilde{z}_t = a_t .$$

Então,

$$\Psi(B) = (1 - \phi_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j ,$$

que converge se  $|\phi_1| < 1$ . Como a raiz da equação característica

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B = 0$$

é  $B = \phi_1^{-1}$ , essa condição é equivalente a dizer que a raiz de  $1 - \phi_1 B = 0$  deve cair fora do círculo unitário.

Nota-se que, se o parâmetro  $\phi_1$  não satisfizer a condição de estacionaridade, a série "explodirá" em alguma direção. ■

**Exemplo 3.4** - Seja o processo AR(2)

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \tilde{z}_t = a_t.$$

Para o processo ser estacionário, as raízes de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$$

devem estar fora do círculo unitário, isto é,  $|G_1^{-1}| > 1$  e  $|G_2^{-1}| > 1$ .

Para raízes reais (figura 3.1), em que

$$\Delta = \phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$$

e  $\phi(0) = 1,$

tem-se

$$\phi(-1) > 0 \Rightarrow 1 + \phi_1 - \phi_2 > 0 \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 < 1$$

e  $\phi(1) > 0 \Rightarrow 1 - \phi_1 - \phi_2 > 0 \Rightarrow \phi_2 + \phi_1 < 1.$

Para raízes complexas, em que

$$\Delta = \phi_1^2 + 4 \phi_2 < 0,$$

tem-se

$$|G_1^{-1}| = |G_2^{-1}|,$$

pois, uma raiz complexa é o conjugado da outra, e

$$G_1^{-1} G_2^{-1} = -\frac{1}{\phi_2},$$

o que sempre ocorre no trinômio do segundo grau. Portanto,

$$|G_1^{-1} G_2^{-1}| = \left| \frac{1}{\phi_2} \right| = |G_1^{-1}|^2 = |G_2^{-1}|^2.$$

Da condição de estacionaridade,

$$|G_1^{-1}| > 1 \implies |\phi_2| < 1, \text{ e}$$

$$|G_2^{-1}| > 1 \implies |\phi_2| < 1,$$

isto é,  $-1 < \phi_2 < 1$ .

Logo, as condições de estacionaridade do processo AR(2) são

$$\phi_1 + \phi_2 < 1,$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1 \text{ e}$$

$$-1 < \phi_2 < 1.$$

(3.2.9)

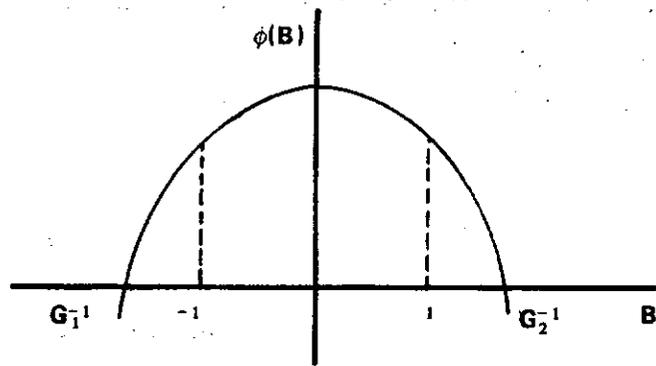


FIGURA 3.1 – Gráfico da Equação Característica do Processo AR (2).

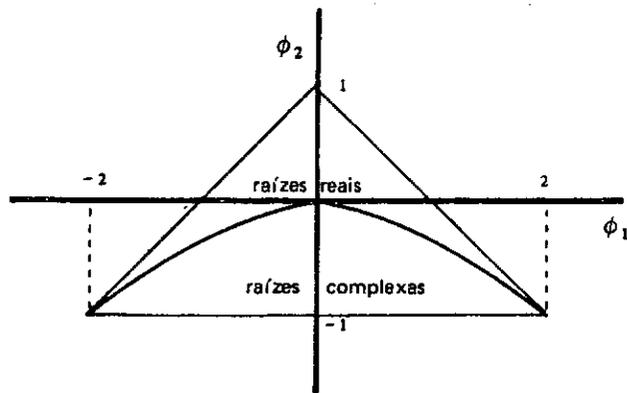


FIGURA 3.2 – Região de Estacionaridade do Progresso AR (2).

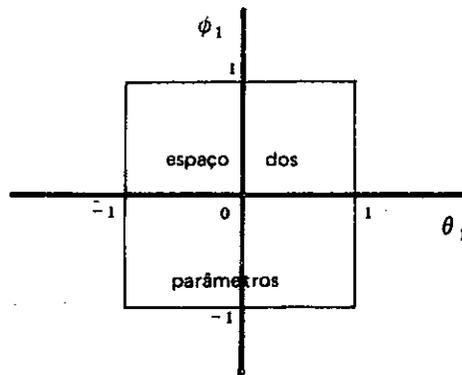


FIGURA 3.3 – Região de Estacionaridade e Invertibilidade do Processo ARMA (1,1).

A região de estacionaridade triangular assim definida encontra-se esquematizada na figura 3.2. ■

Quanto às condições de invertibilidade, como

$$\pi(B) = \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

é finito, não há restrições sobre os parâmetros para assegurar invertibilidade de um processo auto-regressivo.

### 3.2.2.2 - Função de autocorrelação de processos auto-regressivos

Seja o processo AR(p)

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t$$

Multiplicando-se membro a membro por  $\tilde{z}_{t-k}$ , obtêm-se

$$\tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-p} + \tilde{z}_{t-k} a_t \quad (3.2.10)$$

Tomando-se os valores esperados, obtêm-se

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k > 0, \quad (3.2.11)$$

pois, a esperança  $E[\tilde{z}_{t-k} a_t]$  desaparece quando  $k > 0$ , uma vez que  $\tilde{z}_{t-k}$  só envolve choques aleatórios até  $a_{t-k}$ , que são não-correlacionados com  $a_t$ . Dividindo-se (3.2.11) por  $\gamma_0$  obtêm-se

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > 0, \quad (3.2.12)$$

que também pode ser escrito

$$\phi(B) \rho_k = 0. \quad (3.2.13)$$

Sejam  $G_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  as raízes da equação característica  $\phi(B) = 0$ . Escrevendo-se  $\phi(B)$  como em (3.2.7), a solução geral de (3.2.12) é

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k + \dots + A_p G_p^k, \quad (3.2.14)$$

conforme BOX & JENKINS (5).

Uma vez que  $|G_i| < 1$  é a condição de estacionaridade, se as raízes forem distintas, duas situações podem ocorrer:

a) se  $G_i$  é real, o termo  $A_i G_i^k$  decai geometricamente até zero quando  $k$  aumenta, o que é chamado de uma exponencial amortecida; e

b) se um par  $(G_i, G_j)$  é complexo, ele contribui com um termo

$$A d^k \text{ sen } (2\pi f k + F),$$

que segue uma onda senoidal amortecida (5).

De modo geral, a função de autocorrelação de um processo auto-regressivo é constituída de uma mistura de exponenciais e senóides amortecidas.

### 3.2.2.3 - Variância de processos auto-regressivos

Para  $k = 0$  tomam-se os valores esperados em (3.2.10), obten-

do-se

$$Y_0 = \phi_1 Y_{-1} + \dots + \phi_p Y_{-p} + \sigma_a^2,$$

uma vez que

$$E[\tilde{z}_t a_t] = E[a_t^2] = \sigma_a^2$$

Dividindo-se membro a membro por  $Y_0 = \sigma_z^2$  e substituindo-se  $Y_{-k} = Y_k$ , obtém-se

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1 \phi_1 - \dots - \rho_p \phi_p}. \quad (3.2.15)$$

que é a variância do processo AR(p).

#### 3.2.2.4 - Função de autocorrelação parcial de processos auto-regressivos

Seja um processo AR(p).

#### Definição 3.1 - Equações de Yule-Walker

As equações de Yule-Walker são o conjunto de equações lineares dos parâmetros  $\phi_1, \dots, \phi_p$  em termos das autocorrelações  $\rho_1, \dots, \rho_p$

que se obtêm substituindo-se em (3.2.12)  $k = 1, 2, \dots, p$ :

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\
 \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p
 \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

que também podem ser escritas em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_p \end{bmatrix} \tag{3.2.17}$$

### Definição 3.2 — Função de autocorrelação parcial

Denote-se por  $\phi_{kj}$  o  $j$ -ésimo coeficiente num processo AR( $k$ ), de tal modo que  $\phi_{kk}$  seja o último coeficiente. Resolvendo as equações de Yule-Walker sucessivamente para  $k = 1, 2, 3, \dots$  obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \phi_{11} &= \rho_1, \\
 \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}, \\
 \phi_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \text{ etc.}
 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

A quantidade  $\phi_{kk}$ , vista como função do *lag*  $k$ , é chamada função de autocorrelação parcial. ■

Para um processo AR(p), a função de autocorrelação parcial é não nula para  $k$  menor ou igual a  $p$  e vale zero em caso contrário (5), isto é, ela tem um corte depois do *lag*  $p$

$$\phi_{kk} \begin{cases} \neq 0, & k \leq p, \\ = 0, & k > p. \end{cases}$$

### 3.2.2.5 - Estimação da função de autocorrelação parcial

Uma maneira de estimar a função de autocorrelação parcial consiste em estimar sucessivamente modelos auto-regressivos de ordens  $p = 1, 2, 3, \dots$  por mínimos quadrados e tomar as estimativas do último coeficiente de cada ordem. Outra maneira, que pode ser utilizada quando os parâmetros não estão muito próximos dos limites de não-estacionaridade, consiste em substituir os valores em (3.2.12) pelas respectivas estimativas:

$$r_j = \hat{\phi}_{k1} r_{j-1} + \hat{\phi}_{k2} r_{j-2} + \dots + \hat{\phi}_{kk} r_{j-k}, \quad (3.2.19)$$

com  $j = 1, 2, \dots, k$ ; resolvendo essas equações para  $k = 1, 2, \dots$  obtêm-se as estimativas aproximadas de Yule-Walker para  $\phi_{kk}$  (5).

QUENOUILLE (28) mostra que, sob a condição de que o processo é AR(p), as autocorrelações parciais estimadas, de ordem  $p + 1$  em diante, são, de forma aproximada, independentemente distribuídas, com variância

$$\text{var} [\hat{\phi}_{kk}] \approx \frac{1}{N}, \quad k \geq p + 1. \quad (3.2.20)$$

Para  $N$  suficientemente grande  $\hat{\phi}_{kk}$  tem aproximadamente distribuição normal (2), o que permite a construção de intervalo de confiança, como será visto adiante na parte de identificação do modelo.

### 3.2.3 - Modelos de Médias Móveis

Seja um processo  $MA(q)$

$$\tilde{z}_t = \theta(B) a_t,$$

que também pode ser escrito

$$\pi(B) \tilde{z}_t = \theta^{-1}(B) \tilde{z}_t = a_t.$$

#### 3.2.3.1 - Condições de estacionaridade e de invertibilidade para processos de médias móveis

A equação

$$\theta(B) = 0$$

é chamada equação característica do processo. Se  $H_j^{-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$  forem as raízes da equação característica, pode-se escrever

$$\theta(B) = \prod_{j=1}^q (1 - H_j B) \quad (3.2.21)$$

e, expandindo em frações parciais,

$$\pi(B) = \theta^{-1}(B) = \sum_{j=1}^q \frac{M_j}{1 - H_j B} \quad (3.2.22)$$

Para que o processo seja invertível é preciso que  $\pi(B)$  convirja para  $|B| \leq 1$ , o que ocorre se  $|H_j| < 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ . Esta condição é equivalente à de que a equação característica tenha raízes fora do círculo unitário.

**Exemplo 3.5** - Seja o processo MA(1)

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B) a_t.$$

Então,

$$\pi(B) = (1 - \theta_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j B^j,$$

que converge se  $|\theta_1| < 1$ . Como a raiz da equação característica

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B = 0$$

é  $B = \theta_1^{-1}$ , essa condição é equivalente a dizer que a raiz de  $1 - \theta_1 B = 0$  deve cair fora do círculo unitário.

As condições de invertibilidade de um processo MA(2) são análogas às condições de estacionaridade de um processo AR(2), visto no exemplo 3.4. ■

Quanto às condições de estacionaridade, como

$$\Psi(B) = \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

é finito, não há restrições sobre os parâmetros para assegurar estacionaridade de um processo de médias móveis.

### 3.2.3.2 - Função de autocorrelação de processos de médias móveis

Seja o processo MA(q)

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

A função de autocovariância deste processo é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E [ z_t z_{t-k} ] \\ &= E [ (a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}) (a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \dots - \theta_q a_{t-k-q}) ] \\ &= (-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}) \sigma_a^2 \\ &= (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2, \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

$$k = 1, 2, \dots, q$$

e  $\gamma_k = 0, \quad k > q.$

Então, a variância do processo é dada por

$$\sigma_z^2 = \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2 \tag{3.2.24}$$

e a função de autocorrelação, por

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & k = 1, 2, \dots, q \\ 0, & k > q. \end{cases} \tag{3.2.25}$$

Observa-se, pela expressão acima, que a função de autocorrelação anula-se acima de  $q$ , isto é, num processo  $MA(q)$  a função de autocorrelação tem um corte depois do *lag*  $q$ , comportando-se de maneira semelhante à da função de autocorrelação parcial de processo autorregressivo.

As expressões para a função de autocorrelação parcial do processo de médias móveis são, em geral, mais complicadas, entretanto, ela se comporta de maneira análoga à da função de autocorrelação do processo autorregressivo. Se as raízes da equação característica forem distintas, duas situações podem ocorrer:

a) se as raízes são reais, a função de autocorrelação parcial é dominada por uma soma de exponenciais amortecidas; e

b) se as raízes são complexas, a função de autocorrelação parcial é dominada por uma senóide amortecida.

### 3.2.4 - Modelos Mistos Autorregressivos e de Médias Móveis

Seja um processo ARMA  $(p, q)$

$$\phi(B) \tilde{z}_t = \theta(B) a_t .$$

#### 3.2.4.1 - Condições de estacionaridade e de invertibilidade para processos ARMA

De maneira análoga aos processos anteriores, o processo é estacionário se as raízes da equação característica

$$\phi(B) = 0$$

caem todas fora do círculo unitário, e o processo é invertível se as raízes da equação característica

$$\theta(B) = 0$$

caem todas fora do círculo unitário.

**Exemplo 3.6** - Seja o processo ARMA (1,1)

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}.$$

De maneira análoga aos exemplos 3.3 e 3.5, chega-se às seguintes condições de estacionaridade e de invertibilidade, respectivamente:

$$|\phi_1| < 1 \quad \text{e} \quad |\theta_1| < 1.$$

A região de variação dos parâmetros é dada por um quadrado (figura 3.3). ■

### 3.2.4.2 - Função de autocorrelação de processos ARMA

Seja o processo ARMA (p,q):

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}.$$

Multiplicando-se membro a membro por  $\tilde{z}_{t-k}$  e tomando-se as esperanças, obtém-se a função de autocovariância

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{za}(k) - \theta_1 \gamma_{za}(k-1) - \dots - \theta_q \gamma_{za}(k-q),$$

(3.2.26)

onde  $\gamma_{za}(k)$  é a covariância cruzada entre  $z_t$  e  $a_t$ , definida por

$$\gamma_{za}(k) = E[\tilde{z}_{t-k} a_t] \quad (3.2.27)$$

Como  $\tilde{z}_{t-k}$  só depende dos choques ocorridos até o instante  $t-k$ , tem-se

$$\gamma_{za} \begin{cases} = 0, & k > 0, \\ \neq 0, & k \leq 0. \end{cases}$$

Então, para  $k \geq q+1$ , a função de autocovariância é dada por

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad (3.2.28)$$

e a função de autocorrelação, por

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad (3.2.29)$$

Assim, no processo ARMA  $(p, q)$ , as primeiras  $q$  autocorrelações dependem dos parâmetros auto-regressivos e dos parâmetros de médias móveis. Entretanto, após o *lag*  $q$ , as autocorrelações comportam-se como nos modelos auto-regressivos.

Se  $q < p$  a função de autocorrelação consiste de uma mistura de exponenciais amortecidas e/ou de senóides amortecidas. Entretanto, se  $q > p$ , os  $q - p + 1$  primeiros valores  $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{q-p}$  não seguirão este padrão (5).

Quanto à função de autocorrelação parcial, seu comportamento assemelha-se ao de um processo de médias móveis, sendo dominada por uma mistura de exponenciais amortecidas e/ou senóides amortecidas (5).

### 3.3 - MODELOS LINEARES PARA SÉRIES NÃO-ESTACIONÁRIAS

Um processo pode ser não-estacionário de muitas maneiras. Por exemplo, ele pode "explodir" em alguma direção, como em processos que representam o crescimento de microrganismos (5). Entretanto, são de especial importância certos processos não-estacionários que apresentam alguma homogeneidade em seu comportamento. Por exemplo, o processo pode permanecer ao redor de um nível médio temporário durante algum tempo e depois mudar para outro nível também temporário.

Seja um processo ARMA (p, q)

$$\phi(B) \tilde{z}_t = \theta(B) a_t.$$

Para que ele seja estacionário é preciso que todas as raízes da equação característica  $\phi(B) = 0$  caiam fora do círculo unitário. A condição será menos restritiva se se permitir que algumas das raízes possam cair sobre o círculo unitário. Assim, tem-se uma classe mais geral de modelos.

**Definição 3.3 - Modelo auto-regressivo-integrado-de-médias-móveis**

Seja o modelo

$$\varphi(B) \tilde{z}_t = \theta(B) a_t, \quad (3.3.1)$$

onde  $\varphi(B)$  é um operador auto-regressivo não-estacionário tal que as raízes de  $\varphi(B) = 0$  são iguais a um e as restantes caem fora do círculo unitário. O modelo também pode ser escrito

$$\phi(B) \nabla^d z_t = \theta(B) a_t, \quad (3.3.2)$$

onde  $\phi(B)$  é um operador auto-regressivo estacionário e

$$\phi(B) \tilde{z}_t = \phi(B) \nabla^d \tilde{z}_t = \phi(B) \nabla^d z_t,$$

pois,  $\nabla^d \tilde{z}_t = \nabla^d z_t$  para  $d \geq 1$ .

Tal modelo é chamado auto-regressivo-integrado-de-médias-móveis e deno-  
tado por ARIMA (p, d, p). ■

É equivalente dizer que num modelo ARIMA (p, d, q) a d-ési  
ma diferença é estacionária.

Às vezes, pode ser interessante, também, incluir no modelo  
um termo constante  $\theta_0$ , para representar uma possível tendência determi-  
nística ao longo do tempo:

$$\phi(B) z_t = \phi(B) \nabla^d z_t = \theta_0 + \theta(B) a_t. \quad (3.3.3)$$

Sem a constante o modelo inclui sô tendências estocásticas.

Como o ARIMA é um modelo mais geral, alguns dos modelos vis-  
tos anteriormente podem ser tomados como casos particulares: a) o mo-  
delo AR(p) é o caso ARIMA (p, 0, 0); b) o modelo MA(q) é o caso ARIMA  
(0, 0, q); e c) o modelo ARMA (p, q) é o caso ARIMA (p, 0, q). O ca-  
so ARIMA (0, 1, q) é chamado modelo integrado-de-médias-móveis e deno-  
tado por IMA(q).

### 3.3.1 - Dois Casos de Não-estacionaridade

Dois casos interessantes e comuns de não-estacionaridade  
são o das séries não-estacionárias quanto ao nível e o das séries não-  
estacionárias quanto à inclinação (figura 3.4):

a) Séries não-estacionárias quanto ao nível

Quando a série é não-estacionária quanto ao nível ela osci

la ao redor de um nível médio durante algum tempo e depois salta para outro nível temporário. Para torná-la estacionária é suficiente tomar a primeira diferença (14, p.79):

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1}.$$

Então, o modelo é ARIMA (p, 1, q):

$$\phi(B) \nabla z_t = \theta(B); \text{ e}$$

b) Séries não-estacionárias quanto à inclinação

Quando a série é não-estacionária quanto à inclinação ela oscila numa direção por algum tempo e depois muda para outra direção temporária. Para torná-la estacionária é necessário tomar a segunda diferença (14, p.79):

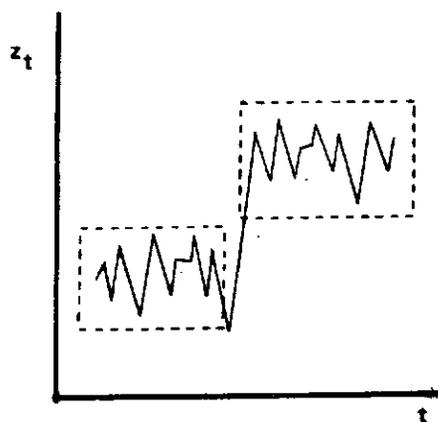
$$\begin{aligned} \nabla^2 z_t &= (z_t - z_{t-1}) - (z_{t-1} - z_{t-2}) \\ &= z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2}. \end{aligned}$$

Então, o modelo é ARIMA (p, 2, q):

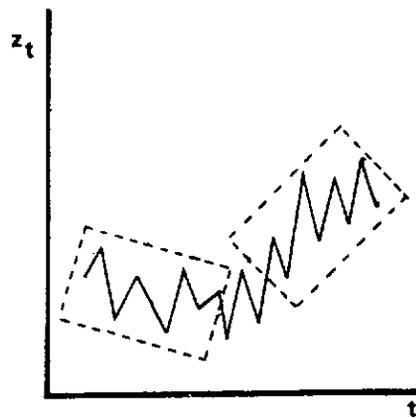
$$\phi(B) \nabla^2 z_t = \theta(B).$$

### 3.3.2 - Formas do Modelo ARIMA

O modelo ARIMA pode ser representado de três formas: a) em termos de valores prévios da série e do valor atual e prévios do ruído; b) em termos do valor atual e prévios do ruído; e c) em termos de valores prévios da série e do valor atual do ruído.

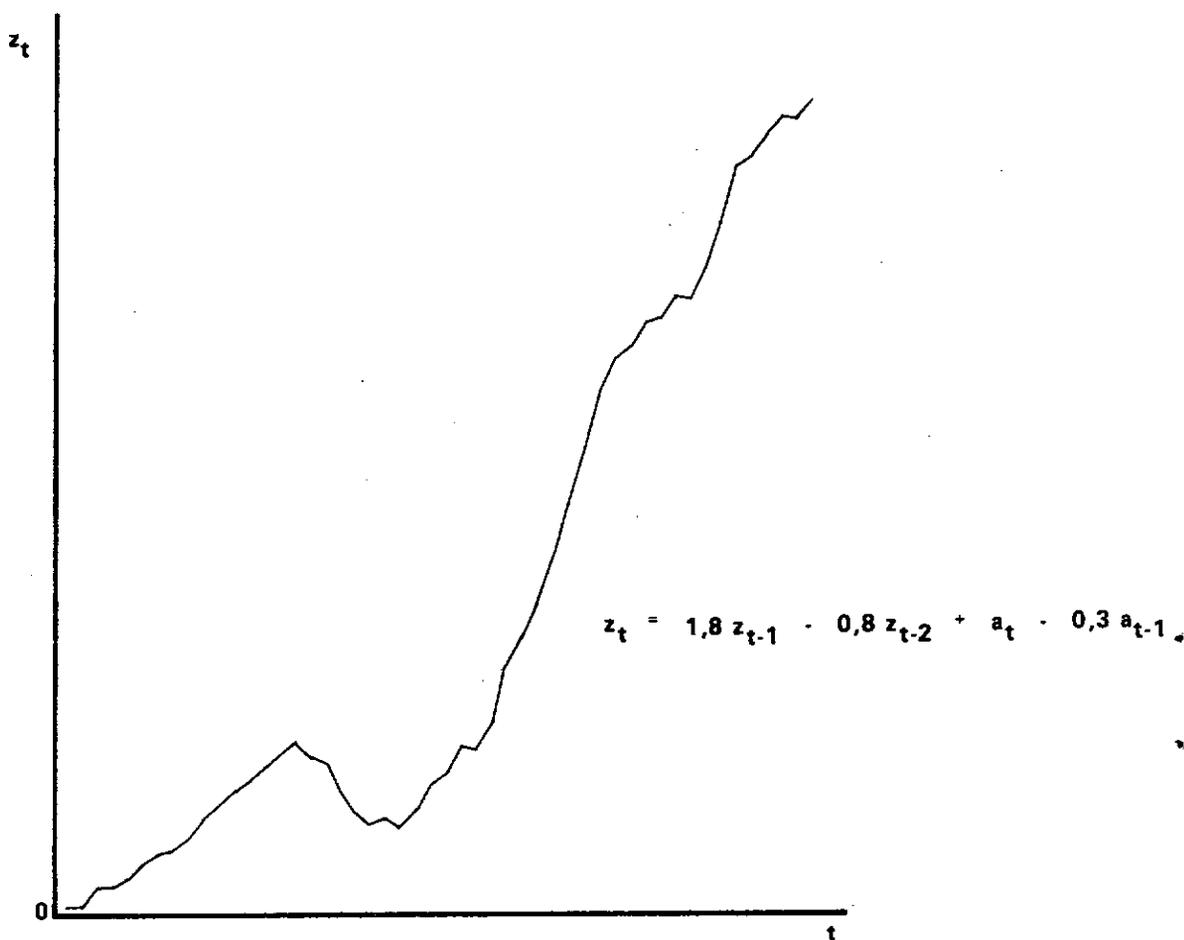


a) série não-estacionária quanto ao nível



b) série não-estacionária quanto à inclinação

**FIGURA 3.4** — Séries Não-estacionárias Quanto ao Nível e quanto à Inclinação.



**FIGURA 3.5** — Gráfico da Série Simulada D, Modelo ARIMA (1,1,1).

### 3.3.2.1 - Forma de equação de diferenças

É a forma usual do modelo:

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \dots + \varphi_{p+d} z_{t-p-d} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} . \quad (3.3.4)$$

Esta é a melhor forma para calcular previsões.

### 3.3.2.2 - Forma de choques aleatórios

De forma análoga a (3.2.1) pode-se escrever

$$\begin{aligned} z_t &= \Psi(B) a_t \\ &= a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j a_{t-j} , \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

com  $\varphi(B) \Psi(B) = \theta(B)$ .

Os pesos  $\Psi$  podem ser obtidos igualando-se os coeficientes das potências de  $B$ , e são usados para calcular as variâncias das previsões.

Em alguns casos é conveniente expressar o modelo em (3.3.5) em termos somente de  $t-k$  choques aleatórios, obtendo-se a forma truncada do modelo de choques aleatórios (5). A equação de diferenças dada em (3.3.1) tem solução

$$z_t = C_k (t-k) + I_k (t-k). \quad (3.3.6)$$

A função complementar  $C_k(t-k)$  é a solução geral da equação de diferenças

$$\varphi(B) C_k(t-k) = 0, \quad (3.3.7)$$

que, em geral, consiste de uma combinação linear de certas funções de tempo. A integral particular  $I_k(t-k)$  é qualquer função que satisfaça

$$\varphi(B) I_k(t-k) = \theta(B) a_t. \quad (3.3.8)$$

BOX & JENKINS (5) mostram que (3.3.8) é satisfeita para  $t-k > q$  por

$$I_k(t-k) = \begin{cases} 0, & t \leq k, \\ t \\ \sum_{j=k+1}^t \psi_{t-j} a_j, & t > k. \end{cases} \quad (3.3.9)$$

A parte  $C_k(t-k)$  representa a componente de  $z_t$  que pode ser determinada pelas observações anteriores a  $k+1$ , enquanto a parte  $I_k(t-k)$  representa a componente imprevisível que engloba todo o efeito dos choques aleatórios. De (3.3.5) e (3.3.9),

$$\begin{aligned} C_k(t-k) &= \sum_{j=-\infty}^k \psi_{t-j} a_j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{t-k+j} a_{k-j}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Como será visto adiante,  $C_k(t-k)$  é a previsão de erro quadrático médio mínimo de  $z_t$ .

### 3.3.2.3 - Forma invertida

De forma análoga a (3.2.2) pode-se escrever

$$\pi(B) z_t = a_t,$$

ou

$$z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t-j} + a_t, \quad (3.3.11)$$

com

$$\varphi(B) = \theta(B) \pi(B).$$

Os pesos  $\pi$  podem ser obtidos igualando-se os coeficientes das potências de B.

**Exemplo 3.7** - O quadro 3.1 e a figura 3.5 apresentam os dados e o gráfico de uma série de 50 observações gerada de acordo com o seguinte modelo ARIMA (1,1,1):

$$(1 - 0,8B)(1 - B)z_t = (1 - 0,3B)a_t,$$

que também pode ser escrito

$$z_t = 1,8 z_{t-1} - 0,8 z_{t-2} + a_t - 0,3 a_{t-1} \quad \blacksquare$$

QUADRO 3.1 - Série Simulada D, Modelo ARIMA (1,1,1)

t	$z_t$	t	$z_t$
1	0,466	26	9,371
2	0,535	27	11,207
3	1,693	28	10,948
4	1,880	29	12,824
5	2,363	30	16,512
6	3,283	31	18,500
7	4,037	32	20,741
8	4,255	33	23,734
9	5,065	34	27,249
10	6,315	35	30,434
11	7,264	36	34,804
12	8,177	37	36,733
13	8,882	38	37,607
14	9,891	39	39,163
15	10,038	40	39,430
16	11,374	41	40,926
17	10,581	42	40,719
18	10,097	43	42,984
19	8,165	44	45,803
20	6,832	45	49,228
21	6,080	46	50,300
22	6,172	47	51,450
23	5,610	48	52,790
24	7,131	49	52,743
25	8,467	50	53,843

Modelo:  $(1 - 0,8 B) (1 - B) z_t = (1 - 0,3 B) a_t$ .